

## FORMA SIMPLIFICADA DE DETERMINAÇÃO DE FUNÇÕES ULBRICH-PILOTY

As funções Ulbrich-Piloty (UP) apresentam em relação às funções Bessel (BS), fase aproximadamente linear em uma faixa de frequência maior com melhores características de seletividade. Tais funções apresentam um atraso de grupo *equiripple* com valores de pico discretos dados por um parâmetro  $\delta$ . Aqui é apresentado um método simples de obtenção de funções com qualquer valor de  $\delta$  entre 0,01s e 0,5s. As singularidades das funções UP geram funções sem qualquer compromisso com a atenuação no limite da banda passante  $A_{\max}$  ou com o valor do atraso de grupo na origem  $\tau_g(0)$ .

Os polos  $s_i$  de um filtro UP são dados por:  $s_i = (a_i\delta + b_i \log \delta + c_i) \pm j(d_i\delta + e_i \log \delta + f_i)$  para  $0,01 \leq \delta \leq 0,5$  onde  $\delta$  é o valor de pico do *ripple* do atraso de grupo. A equação anterior foi obtida por meio de uma interpolação dos valores dos polos apresentados por Ulbrich e Piloty em seu trabalho original.

Uma posterior desnormalização para uma frequência  $\bar{\omega}_p$  qualquer pode ser obtida por uma simples mudança de variáveis  $\bar{s} = s / \bar{\omega}_p$ . Uma posterior desnormalização para a obtenção de um  $\tau_g(0)$  qualquer pode ser obtida por uma simples mudança de variáveis  $\bar{s} = \tau_g(0) \times s$ .

Se uma função não apresenta naturalmente uma desejada atenuação  $A_{\max}$  em  $\bar{\omega}_p = 1$ , determina-se inicialmente a função normalizada, com argumento convenientemente chamado de  $s'$ . Posteriormente, determina-se numericamente através da função  $|T(\omega')|_{\text{dB}} = 20 \log |T(s')|_{s'=j\omega'}$  a frequência  $\omega_N$  na qual se tem a atenuação  $A_{\max}$ . Após, faz-se uma mudança de variável, substituindo-se  $s'$  por  $s' = \omega_N \bar{s}$  na função  $T(s')$ . Assim, no limite da banda passante normalizada  $\bar{\omega}_p = 1$  será obtida a atenuação  $A_{\max}$ .

Neste caso, as frequências dos polos ficam divididas por  $\omega_N$  e os tempos de atraso, multiplicados por  $\omega_N$ .

$$\bar{s}_k = s'_k / \omega_N \quad \bar{\tau}_g(\omega) = \tau'_g(\omega) \times \omega_N.$$

### Comparação entre Funções UP ( $\delta = 0,05$ ) e BS

Aqui é feita uma comparação entre magnitude e atraso de grupo das funções com  $n=9$  UP e BS considerando dois casos: Caso (i) Atenuação  $A_{\max} = 3$  dB em  $\bar{\omega}_p = 1$ . Caso (ii) Atraso de grupo na origem  $\tau_g(0) = 1$  s.

Na Fig. 1(a) nos dois casos a função UP é mais seletiva que a função BS. Na Fig. 1(b), observa-se que nos dois casos a função UP apresenta um atraso aproximadamente plano em uma faixa maior de frequências do que a apresentada pela função BS.

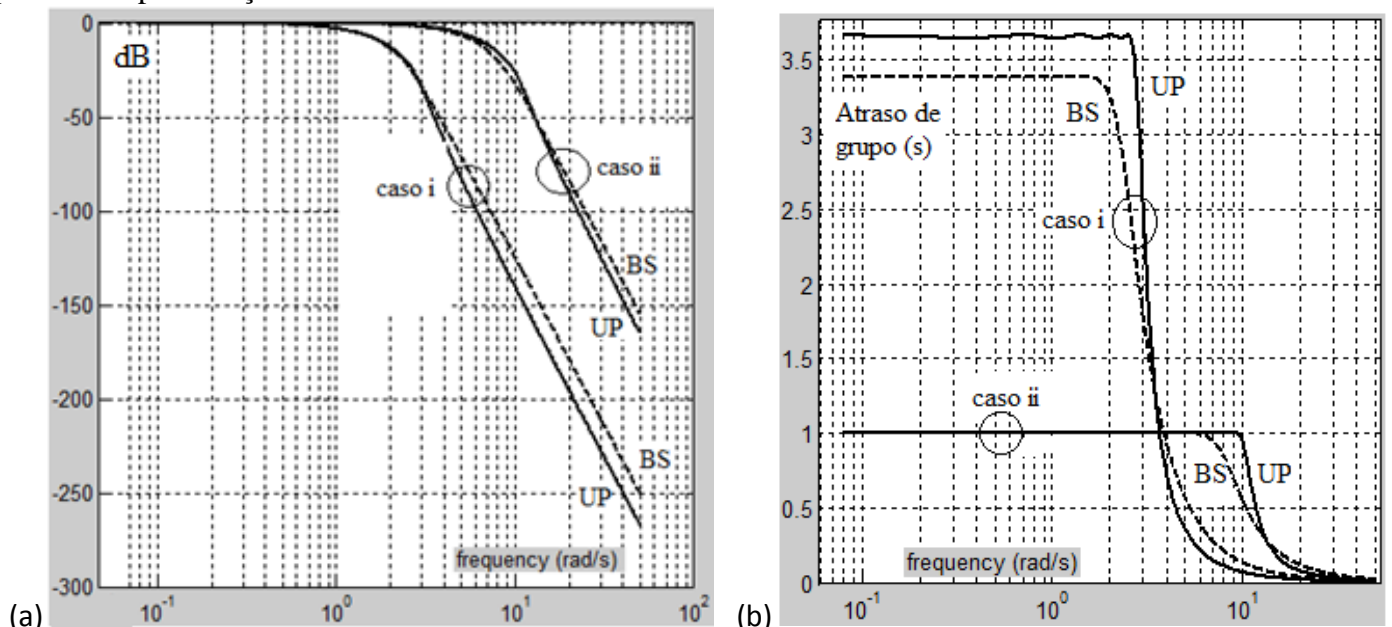


Fig.1 - (a) Magnitude, (b) atraso de grupo de funções UP e BS para  $A_{\max} = 3$  dB em  $\bar{\omega}_p = 1$  e atraso de grupo na origem igual a  $\tau_g(0) = 1$  s.

### Comparação entre Funções UP ( $n=9$ ) com $\delta = 0,01$ e $\delta = 0,5$ .

As Figuras 2(a) e 2(b) mostram, respectivamente, a magnitude e o atraso de grupo das funções originais UP para  $\delta=0,01$  e  $\delta=0,5$ . Pode ser observado que as atenuações no limite da banda passante normalizada  $\bar{\omega}_p = 1$  são  $A_{\max} = 78,283$  dB e  $A_{\max} = 99,1$  dB, com  $\tau_g(0) = 17,5093$  s e  $\tau_g(0) = 22,069$  s, respectivamente.

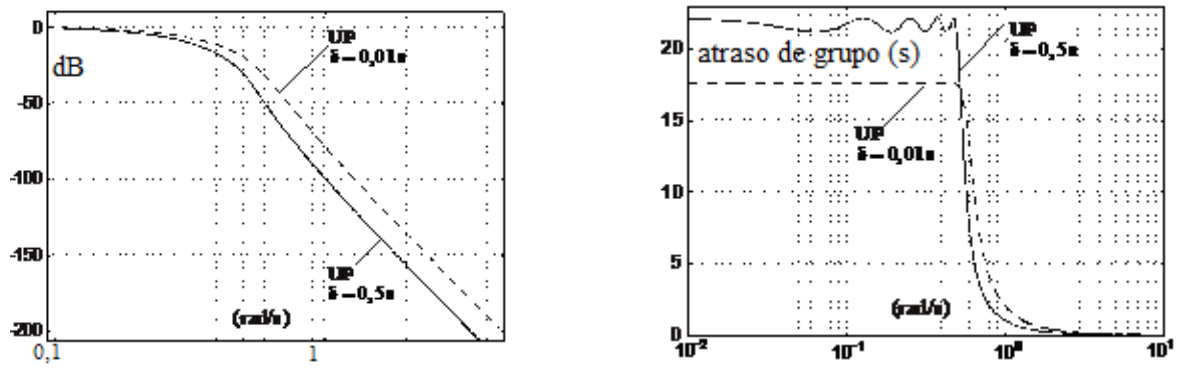


Figura 2. (a) Magnitude, (b) atraso de grupo de funções originais UP com  $n=9$ .

A Tabela abaixo apresenta para ordens  $n$  de 2 a 10, os valores de  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  necessários para o cálculo da parte real dos polos, e os valores de  $d_i$ ,  $e_i$  e  $f_i$ , para o cálculo da parte imaginária.

$n$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$
2	-0,213900	+0,383600	-0,079220	-0,161800	+0,179900	-0,205100
3	-0,066510	+0,181800	-0,118200	-0,092190	+0,126700	-0,337800
3	-0,089500	+0,236500	-0,116800	-	-	-
4	-0,043440	+0,154900	-0,114600	-0,015410	+0,028420	-0,140800
4	-0,026700	+0,108200	-0,110100	-0,056340	+0,091710	-0,399100
5	-0,022920	+0,109800	-0,105500	-0,01411	+0,032550	-0,227300
5	-0,012000	+0,073060	-0,097330	-0,03749	+0,070160	-0,431500
5	-0,028750	+0,120300	-0,103700	-	-	-
6	-0,019010	+0,094480	-0,094360	-0,002844	+0,010410	-0,096200
6	-0,012620	+0,082700	-0,095850	-0,011180	+0,031330	-0,283500
6	-0,005503	+0,053410	-0,085820	-0,026630	+0,056110	-0,450700
7	-0,012700	+0,076220	-0,086290	-0,002929	+0,014550	-0,164100
7	-0,006984	+0,065120	-0,087100	-0,008688	+0,028910	-0,322100
7	-0,002289	+0,041210	-0,076270	-0,019860	+0,046400	-0,462900
7	-0,014730	+0,079370	-0,085620	-	-	-
8	-0,011140	+0,067110	-0,078560	-0,0006071	+0,005462	-0,071780
8	-0,008566	+0,063070	-0,079320	-0,002419	+0,016080	-0,213900
8	-0,004126	+0,053140	-0,079290	-0,006799	+0,026400	-0,350000
8	-0,0005758	+0,033060	-0,068430	-0,015390	+0,039360	-0,471200
9	-0,008400	+0,057510	-0,072630	-0,0005741	+0,008453	-0,126800
9	-0,005801	+0,053320	-0,073290	-0,001845	+0,016430	-0,251700
9	-0,001713	+0,044330	-0,072980	-0,005391	+0,024090	-0,370900
9	0,0003794	+0,027320	-0,061960	-0,012280	+0,034060	-0,477100
9	-0,009230	+0,058730	-0,072370	-	-	-
10	-0,007490	+0,051650	-0,067220	-0,00007118	+0,003435	-0,056880
10	-0,006348	+0,049950	-0,067550	-0,0003655	+0,010090	-0,170100
10	-0,003904	+0,045890	-0,068050	-0,001344	+0,016210	-0,281200
10	-0,0004547	+0,037830	-0,067370	-0,004335	+0,022060	-0,387100
10	-0,000924	+0,023090	-0,056560	-0,010040	+0,029950	-0,481500