1- Resposta Temporal em Função da Posição dos Polos

Seja $R(s)=F(s)E(s)$ a resposta de um sistema linear, concentrado e invariante. Se $F(s)$ e $E(s)$ são funções reais racionais, então $R(s)$ é real racional e pode ser expressa como:

$$R(s)=\frac{N'(s)}{D(s)}=\sum_{i=0}^{m}a_i s^i \Big/ \sum_{j=0}^{n}b_j s^j \tag{1}$$

Se $m>n$ então $R(s)$ pode ser escrita como:

$$\frac{N'(s)}{D(s)}=k_{m-n}s^{m-n}+k_{m-(n+1)}s^{m-(n+1)}+\cdots+k_1 s+k_0+\frac{N(s)}{D(s)} \text{ com } \underline{0}N(s)<\underline{0}D(s) \tag{2}$$

Se $m=n$ $R(s)$ pode ser escrita como:

$$\frac{N'(s)}{D(s)}=k_\infty+\frac{N(s)}{D(s)} \text{ com } \underline{0}N(s)<\underline{0}D(s),\ k_\infty=\lim_{s\to\infty}\frac{N'}{D}=\frac{a_m}{b_n} \text{ e } N(s)=N'(s)-k_\infty D(s). \tag{3}$$

O denominador $D(s)$ com $b_n=1$ pode ser escrito como $D(s)=\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)=\prod_{i=1}^{k}(s-p_i)^{m_i}$, onde p_i é o i-ézimo pólo com multiplicidade m_i, com $\sum_{i=1}^{k}m_i=n=\underline{0}D(s)$. A decomposição de $N(s)/D(s)$ em frações parciais fornece

$$\frac{N(s)}{D(s)}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{k_{ij}}{(s-p_i)^j}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{k_{i1}}{(s-p_i)}+\frac{k_{i2}}{(s-p_i)^2}+\cdots+\frac{k_i m_i}{(s-p_i)^{m_i}}\right] \tag{4}$$

onde os resíduos k_{ij} são dados por:

$$k_{ij}=\frac{1}{(m_i-j)!}\frac{d^{m_i-j}}{ds^{m_i-j}}\frac{N(s)}{D(s)}(s-p_i)^{m_i}\bigg|_{s=p_i} \tag{5}$$

Cada polo de multiplicidade m_i será responsável por uma resposta do tipo:

$$r_i(t)=k_{i1}e^{p_i t}+k_{i2}te^{p_i t}+\cdots+\frac{k_i m_i}{(m_i-1)!}t^{m_i-1}e^{p_i t} \tag{6}$$

Se p_ℓ é um polo complexo, p_ℓ^* também o será **(porque?)**. Da mesma forma os resíduos correspondentes também serão complexos conjugados, que é uma condição para que os coeficientes sejam reais. Assim, a resposta associada a p_ℓ é:

$$r_\ell(t)=k_{\ell 1}e^{p_\ell t}+k_{\ell 1}^*e^{p_\ell^* t}+\cdots+\frac{k_\ell m_\ell}{(m_\ell-1)!}t^{m_\ell-1}e^{p_\ell t}+\frac{k_\ell^* m_\ell t^{m_\ell-1}}{(m_\ell-1)!}e^{p_\ell^* t} \tag{7}$$

ou, ainda

$$r_\ell(t)=\sum_{i=1}^{m_i}2\left|k_{\ell i}\right|t^{(i-1)}e^{a_\ell t}\cos(b_\ell t+\theta_i) \text{ onde } p_\ell=a_\ell\pm jb_\ell \text{ e } \theta_i=-\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\Im\mathrm{m}(k\ell_i)}{\Re\mathrm{e}(k\ell_i)}\right] \tag{8}$$

Consideremos um caso particular onde $p_\ell = -a - bj$ com resíduo $c + dj = k$ e $p_\ell^* = -a + bj$ com resíduo $c - dj = k^*$. Então a resposta $r(t)$ será:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[R(s)\right] = r(t) = 2e^{-at}\left[c\cos bt + (-d\,\mathrm{sen}\,bt)\right] = 2\left|k\right|e^{-at}\left[\cos\left(bt + \mathrm{tg}^{-1}\frac{d}{c}\right)\right] \tag{9}$$

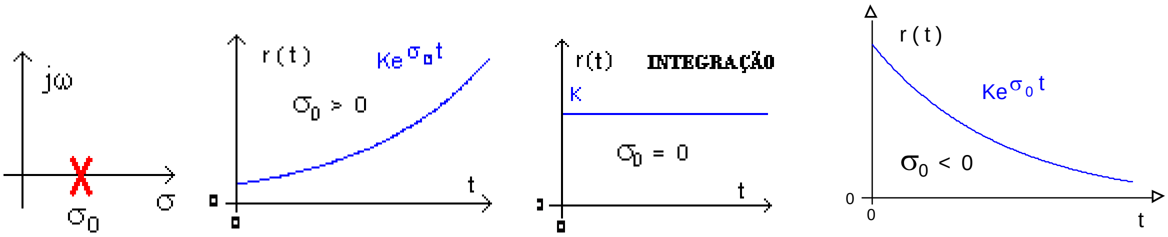
Esta análise mostra que os polos de $R(s)$ determinam a forma de onda da resposta. Os zeros influem na fase e na amplitude dos k_i's determinando, por conseguinte, a amplitude e o ponto inicial dos sinais de resposta da rede.

Para ilustrar o comportamento de uma rede em função da parte real do polo ou de sua multiplicidade tomemos uma função de rede $T(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)} = \dfrac{R(s)}{E(s)}$. Suponhamos que a excitação seja impulsiva, isto é, $e(t) = \delta(t) \rightarrow E(s) = 1$. Assim $T(s) = R(s)$, e a função de rede é a própria resposta do sistema. Supondo º N(s) < º D(s) (isto é supondo a análise da influência somente dos polos finitos com saída sem característica impulsiva), a função $T(s)$ pode ser decomposta em:

$$T(s) = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n} \tag{10}$$

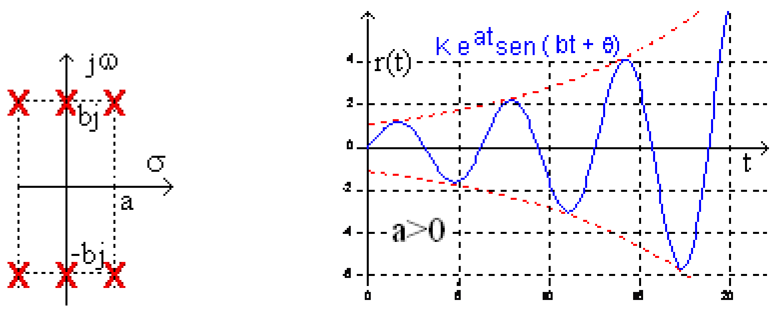
Sabendo por (5) que $K_1 = T(s)(s + p_1)\big|_{s=-p_1}$ e $K_2 = T(s)(s + p_2)\big|_{s=-p_2}$, calcule $T(s)$ na forma $T(s) = \dfrac{K_1}{s + p_1} + \dfrac{K_2}{s + p_2}$ para $T(s) = \dfrac{6}{(s + p_1)(s + p_2)}$. **Resposta**: $T(s) = \dfrac{6}{(s + p_1)} + \dfrac{-6}{(s + p_2)}$

Nas Figuras 1, 2 e 3 estão ilustrados os tipos de resposta em função da localização dos polos.



(a) (b) (c) (d)

Figura 1 - Respostas Impulsivas em Função da Localização dos Polos em Funções de 1ª Ordem.



(a) (b)

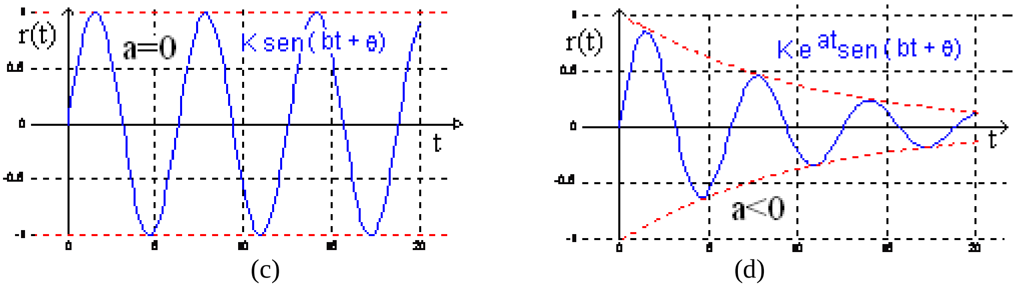


Figura 2 - Respostas impulsivas em função da localização dos polos em funções de 2ª ordem.

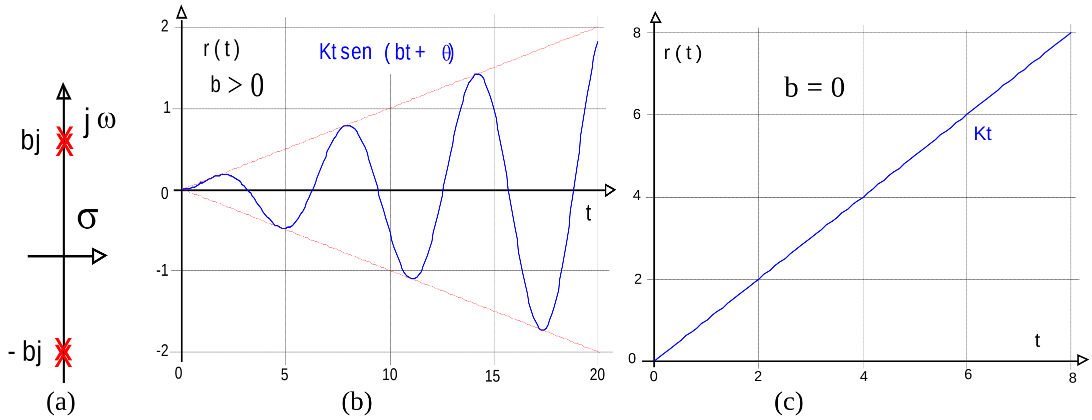


Figura 3 - Respostas Impulsivas em Função da Localização dos Polos em Funções de 2ª Ordem com Polos de Multiplicidade 2

2 - Interpretação de Polos e de Zeros no Domínio Tempo.

Seja uma função de rede $T(s)=T_O\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)/\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)$. Suponhamos que os polos e zeros são simples. Se a excitação tem um pólo simples em $s=z_k$, então a componente forçada da resposta devido à excitação é zero, já que o polo de $E(s)$ é cancelado pelo zero de $T(s)$, isto é, $R(s)=T(s)E(s)=k\dfrac{(s-z_i)\ldots(s-z_k)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_n)}\times\dfrac{1}{(s-z_k)}$ e a resposta $r(t)$ não terá qualquer característica do sinal de excitação $\mathrm{e}(t)$, caracterizado por $e^{z_k t}$.

Exemplo 1

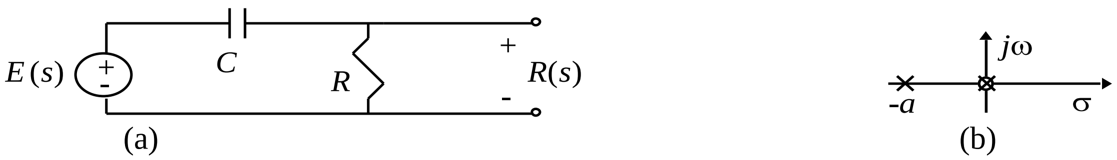


Figura 4- Filtro Passa-alta de ordem 1.

$$T(s)=\frac{R(s)}{E(s)}=\frac{s}{s+a} \qquad \mathrm{e}(t)=u(t)\ \therefore\ E(s)=\frac{1}{s} \qquad R(s)=\frac{s}{s+a}\frac{1}{s}=\frac{1}{s+a} \tag{11}$$

$\therefore\ r(t)=e^{-at}u(t)\ \therefore$ A saída não contém traço da entrada porque o polo do sinal na origem foi cancelado pelo zero de $T(s)$ na origem.

Suponhamos agora que a excitação tenha um polo simples em p_ℓ. Neste caso a resposta do sistema é $R(s)=T(s)E(s)=k\dfrac{(s-z_i)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\ldots(s-p_\ell)\ldots(s-p_n)}\times\dfrac{1}{(s-p_\ell)}$. Então, a resposta $r(t)$ exibirá componentes do tipo $e^{p_\ell t}$ e $te^{p_\ell t}$.

Exemplo 2

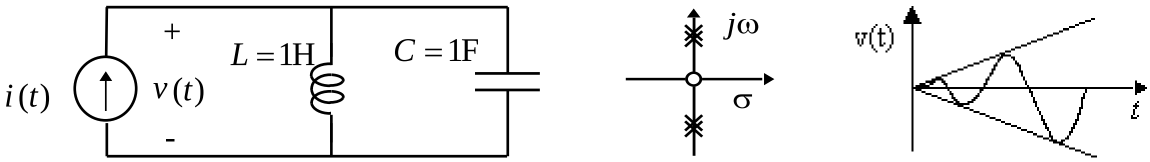


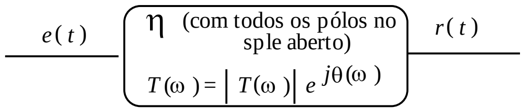
Figura 5 -

$$Z(s)=V(s)/I(s)=s/s^2+1 \tag{12}$$

$$\text{Se } i(t)=\operatorname{sen} t u(t) \therefore I(s)=\frac{1}{s^2+1} \therefore V(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2} \therefore v(t)=\frac{t}{2}\operatorname{sen} t\times u(t) \tag{13}$$

3 - RESPOSTA DE REDES EM REGIME PERMANENTE SENOIDAL

Supondo excitação sinusoidal de amplitude X_m, frequência ω_0 e fase φ_0, a um sistema com todos os polos no semiplano lateral esquerdo aberto, na saída tem-se também um sinal sinusoidal, porém, com a amplitude e a fase modificados pela magnitude e a fase do sistema na frequência ω_0.



Seja um sinal de entrada $e(t)=E_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ que pode ser expresso como:

$$e(t)=E_m\cos(\omega_0 t+\varphi_0)=(E_m/2)(e^{j\omega_0 t}e^{j\varphi_0}+e^{-j\omega_0 t}e^{-j\varphi_0})$$

A Transformada de Fourier deste sinal é: $\mathfrak{F}(e(t))=\frac{E_m}{2}2\pi\{e^{j\varphi_0}[\delta(\omega-\omega_0)]+e^{-j\varphi_0}[\delta(\omega+\omega_0)]\}$

Como a transformada $R(\omega)$ do sinal de saída é a transformada do sinal de entrada multiplicada pela transformada da resposta ao impulso do sistema, tem-se que:

$$R(\omega)=|T(\omega_0)|\frac{E_m}{2}2\pi\left\{e^{j[\theta(\omega_0)+\varphi_0]}[\delta(\omega-\omega_0)]+e^{j[\theta(-\omega_0)-\varphi_0]}[\delta(\omega+\omega_0)]\right\}$$

Como a fase da função de transferência é uma função impar tem-se que: $e^{j[\theta(-\omega_0)]}=e^{-j[\theta(\omega_0)]}$
Assim, a resposta no tempo $r(t)$ pode ser escrita como:

$$r(t)=|T(\omega_0)|\frac{E_m}{2}\mathfrak{F}^{-1}\left\{e^{j[\theta(\omega_0)+\varphi_0]}2\pi[\delta(-\omega_0)]+e^{-j[\theta(\omega_0)+\varphi_0]}2\pi[\delta(\omega+\omega_0)]\right\}$$

$$r(t)=|T(\omega_0)|\frac{E_m}{2}\left[e^{j[\theta(\omega_0)+\varphi_0]}e^{j\omega_0 t}+e^{-j[\theta(\omega_0)+\varphi_0]}e^{-j\omega_0 t}\right]$$

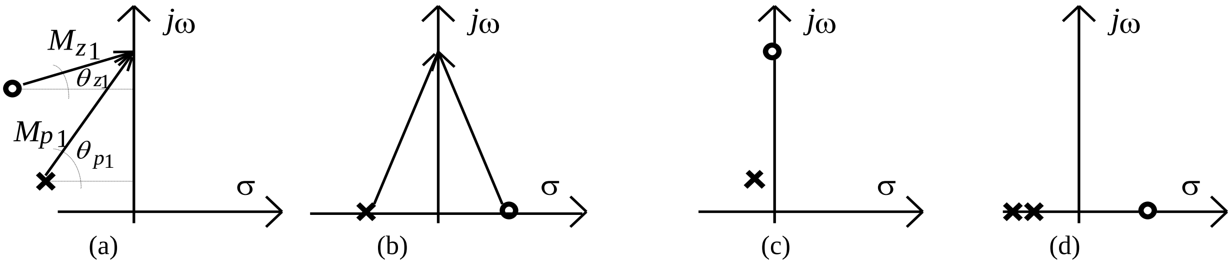
Logo, $r(t)$ é igual a: $r(t)=|T(\omega_0)|E_m\cos[\omega_0 t+\varphi_0+\theta(\omega_0)]$.

4 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA MAGNITUDE E DA FASE

Seja $T(s)=T_0\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$. Logo $T(\omega)=T_0\frac{(j\omega-z_1)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)\cdots(j\omega-p_n)}$

Esta última expressão ainda pode ser escrita como: $T(\omega)=T_0\frac{M_{z1}\cdots M_{zm}\,e^{j(\theta_{z1}+\cdots+\theta_{zm})}}{M_{p1}\cdots M_{pn}\,e^{j(\theta_{p1}+\cdots+\theta_{pn})}}$

onde $M_{z1} \cdots M_{zm}$ e $\theta_{z1} \cdots \theta_{zm}$ são os módulos e as fases dos zeros e $M_{p1} \cdots M_{pn}$ e $\theta_{p1} \cdots \theta_{pn}$ são os módulos e as fases dos pólos.



No caso da Fig. (d) pode-se dizer que sob o ponto de vista da magnitude, o sistema se comporta como um de primeira ordem. *(Comentar os casos do equalizador de fase, do rejeita-faixa e o de filtros com pólos muito próximos do eixo* $j\omega$*. Comentar sobre funções de fase mínima e sobre a Transformada de Hilbert).*

5 - CARACTERÍSTICAS DE FILTROS SELETORES. INTERPRETAÇÃO DE SINGULARIDADES NO DOMÍNIO FREQUÊNCIA.

TIPOS DE FUNÇÕES DE 1ª E 2ª ORDEM

1) FUNÇÕES BÁSICAS: NÃO SÃO FUNÇÕES DE FILTROS PROPRIAMENTE DITOS. SÃO USADAS PARA GERAR FUNÇÕES COMPLEXAS
INTEGRADOR
DIFERENCIADOR

2) FUNÇÕES DOS FILTROS SELETORES
PASSA-BAIXA DE 1ª ORDEM
PASSA-BAIXA DE 2ª ORDEM
PASSA-ALTA DE 1ª ORDEM
PASSA-ALTA DE 2ª ORDEM
PASSA-FAIXA DE 2ª ORDEM
REJEITA-FAIXA DE 2ª ORDEM
PASSA-BAIXA "NOTCH" DE 2ª ORDEM
PASSA-ALTA "NOTCH" DE 2ª ORDEM

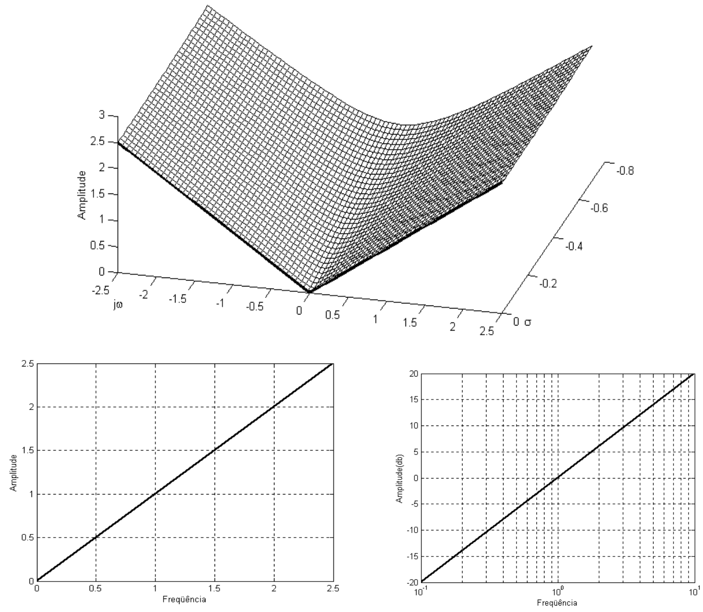
3) OUTRAS FUNÇÕES DE FILTROS
EQUALIZADOR DE FASE DE 1ª ORDEM
EQUALIZADOR DE FASE DE 2ª ORDEM
EQUALIZADOR DE ÁUDIO
REFORÇO ou ATENUAÇÃO DE GRAVES
REFORÇO ou ATENUAÇÃO DE AGUDOS

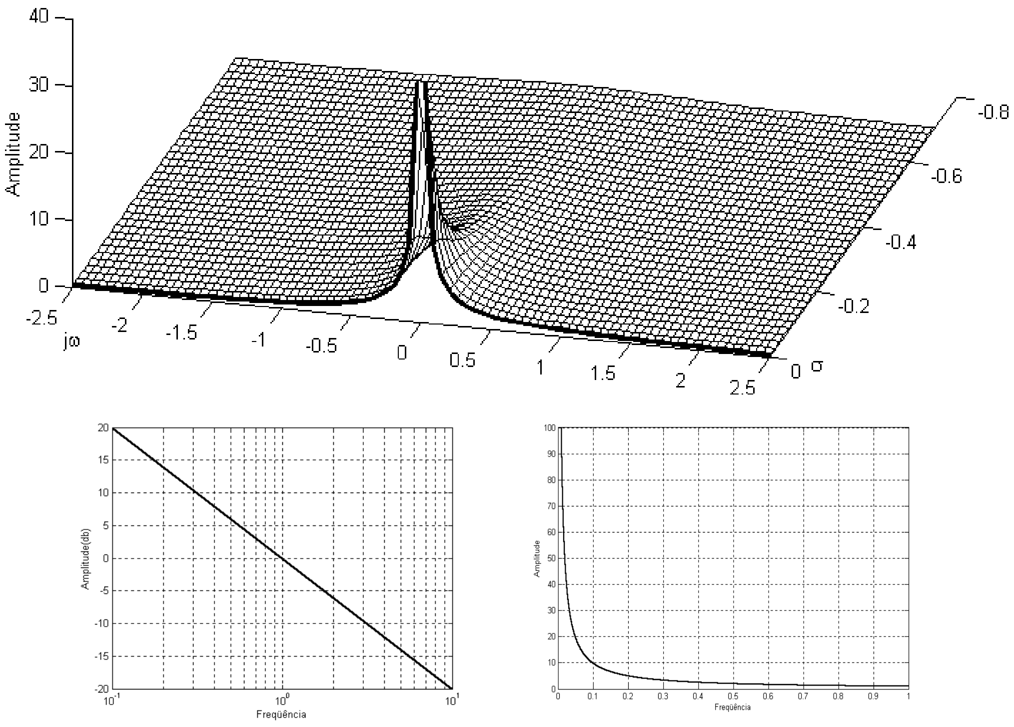
Os filtros seletores de sinais se constituem numa classe especial de sistemas lineares porque os polos estão no sple aberto e os zeros estão sobre o eixo $j\omega$. Basicamente são em número de 4: Passa-baixa (com sua variação “notch”), passa-alta (com sua variação “notch”), passa-faixa e rejeita-faixa.

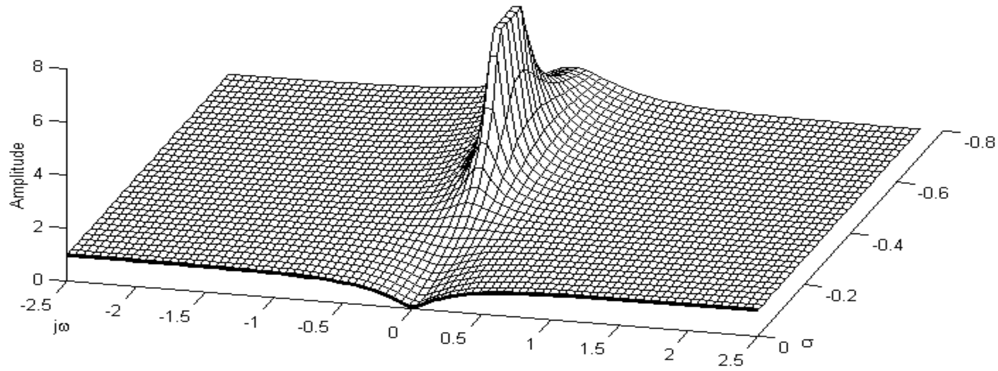
As funções de 1ª e 2ª ordem que serão apresentadas abrangem toda a gama de possibilidades de filtros polinomiais (Buterworth, Chebyshev, etc.) cujas funções passa-baixa possuem todos os zeros de transmissão no infinito, não polinomiais (Cauer, etc.) que possuem zeros de transmissão finitos e ainda outros tipos de funções importantes.

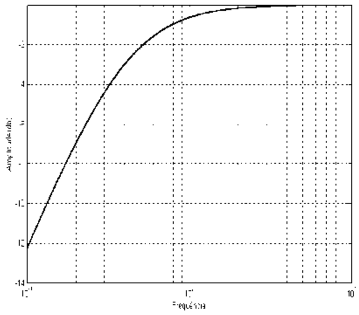
Nas Figuras estão apresentadas as magnitudes de $T(s)$ para várias funções de 1ª e 2ª ordem. Nestas, está ressaltado o corte no plano $j\omega(\sigma = 0)$, ou seja, $|T(j\omega)|$. Os polos estão no SPLE aberto. Os zeros estão sobre $j\omega$, de $0 \to \infty$.

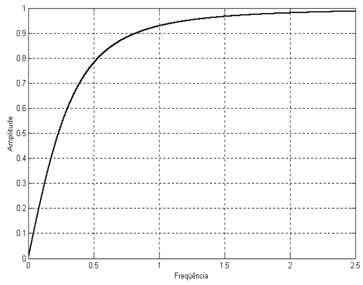
Nas tabelas são apresentadas as funções de um integrador, um diferenciador e de um equalizadores de fase de 1ª ordem, que não são filtros seletores, mais as funções dos filtros passa-baixa e passa-alta de 1ª ordem e as funções de 2ª ordem.

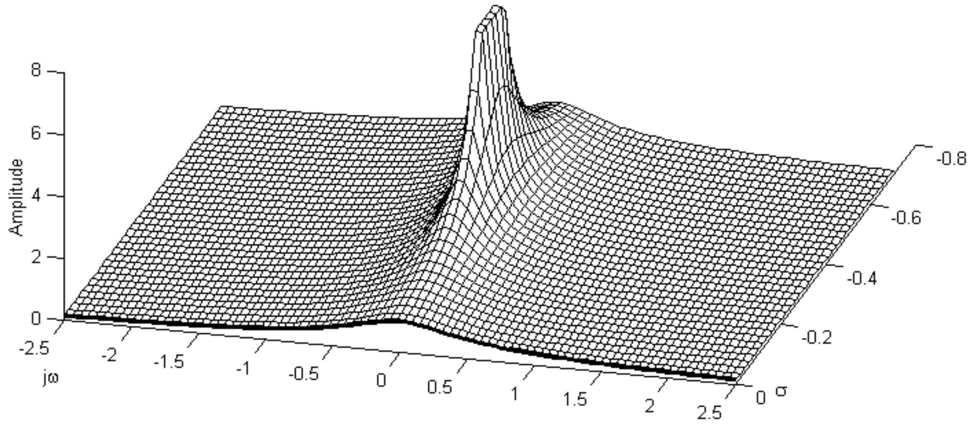


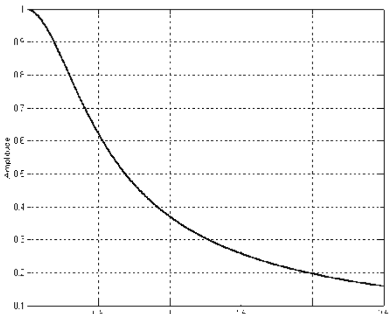


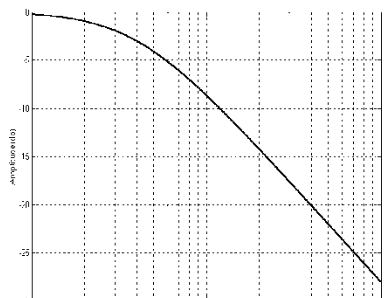

Amplitude
8
6
4
2
0
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
jω
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
σ

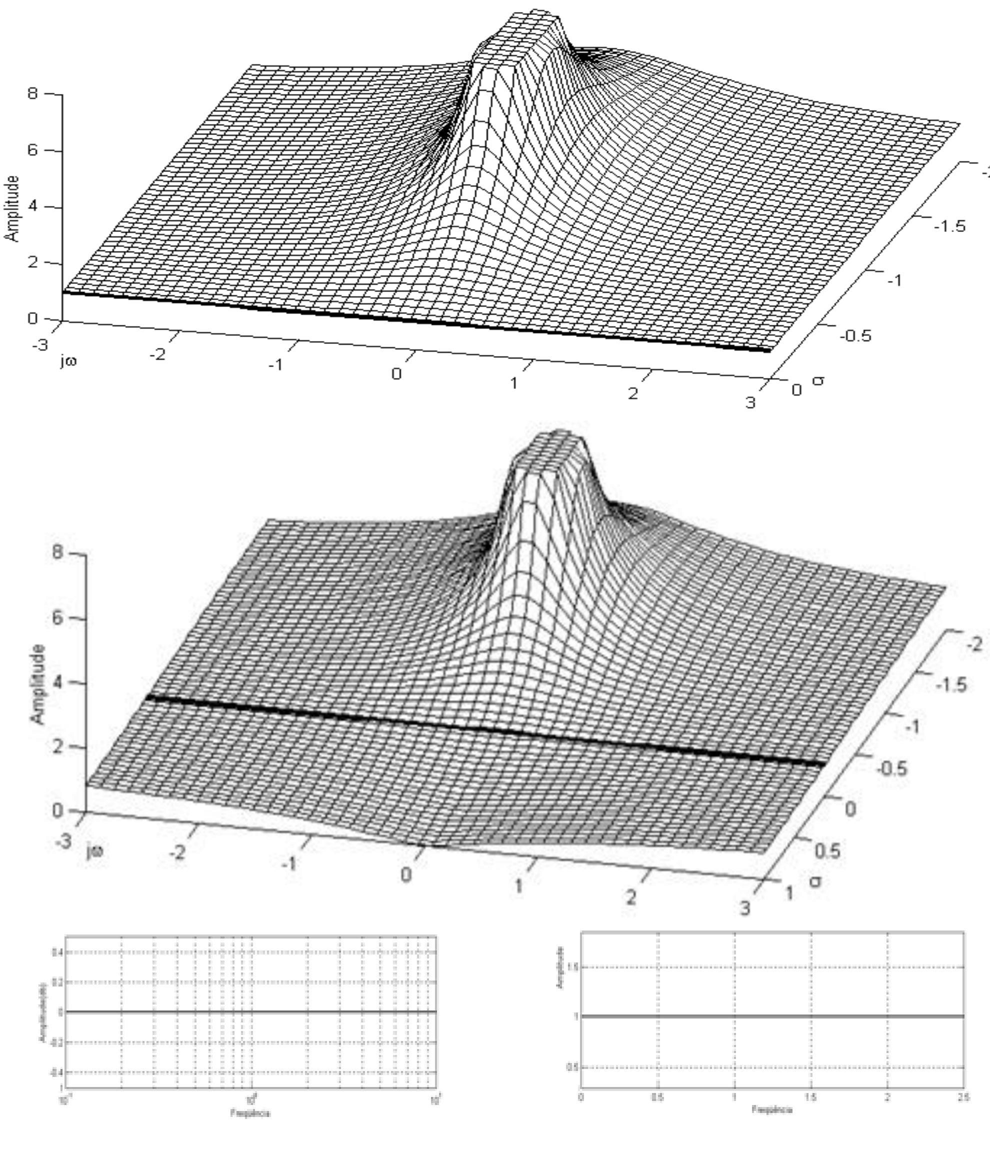



Amplitude
Frequência

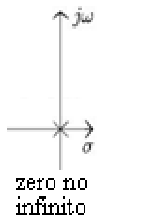
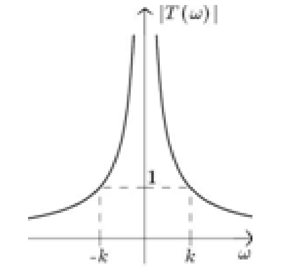
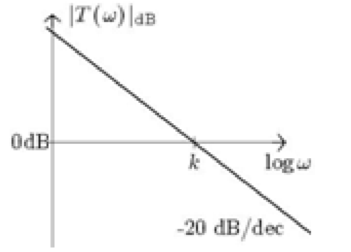
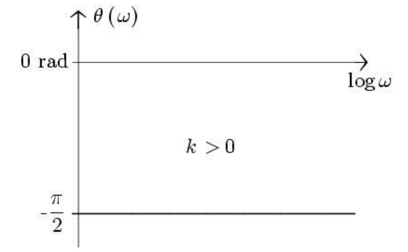
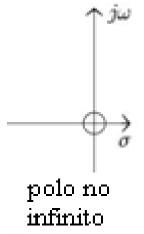
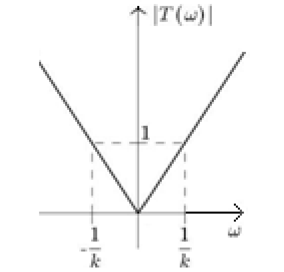
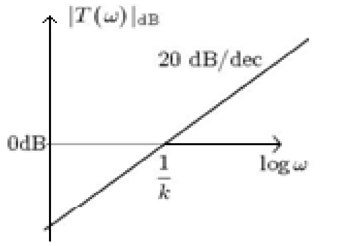
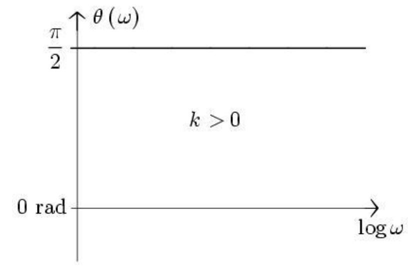
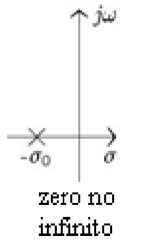
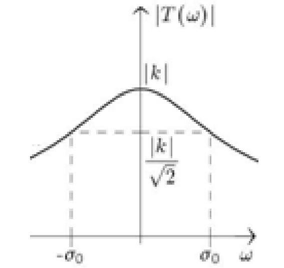
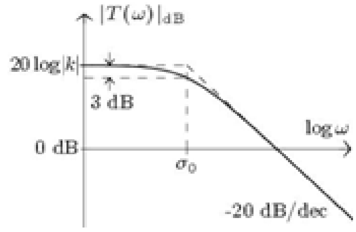
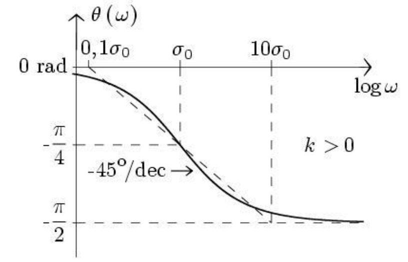
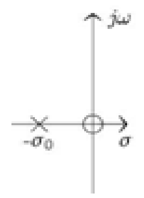
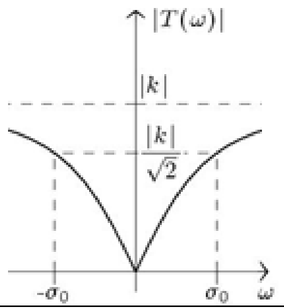
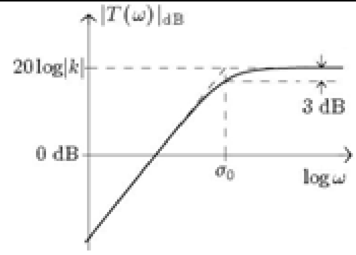
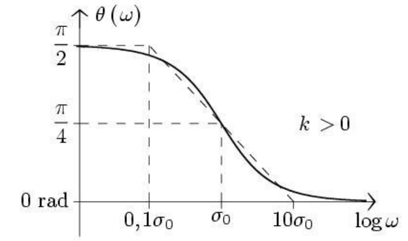
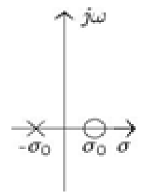
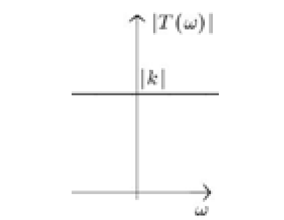
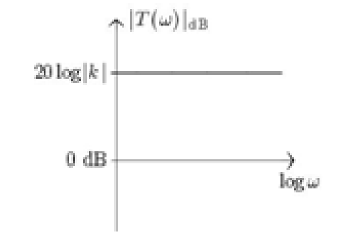
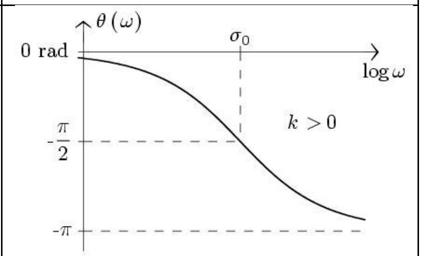
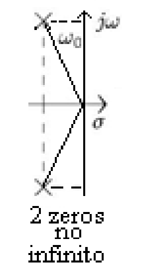
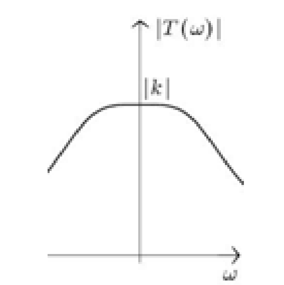
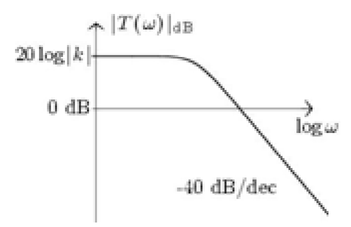
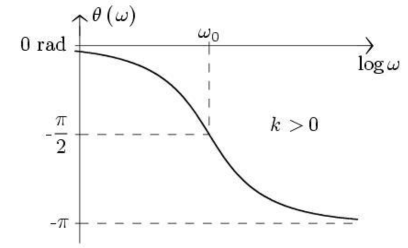

Amplitude
8
6
4
2
0
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
jω
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
σ

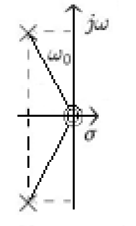
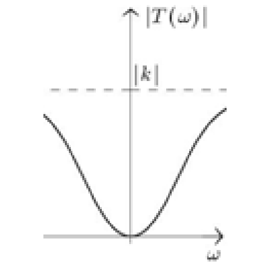
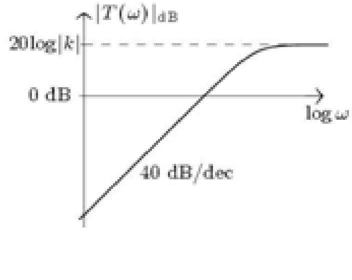
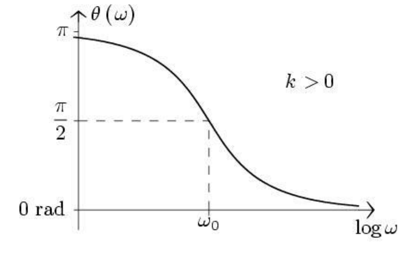
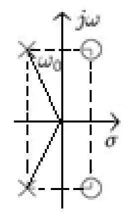
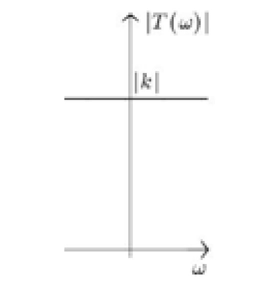
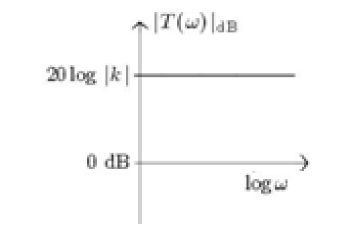
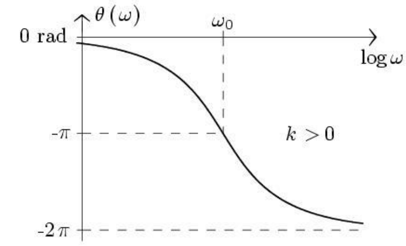
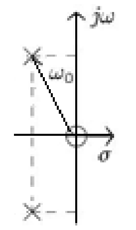
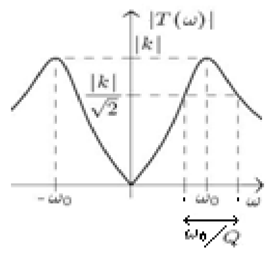
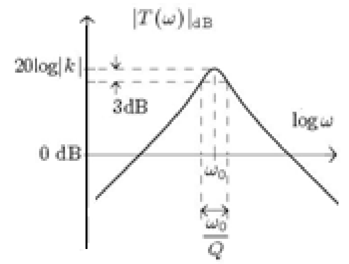
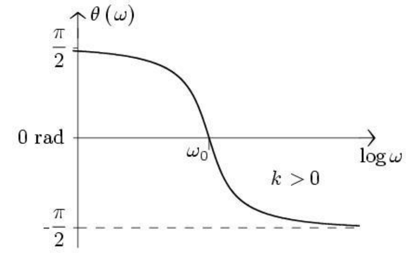
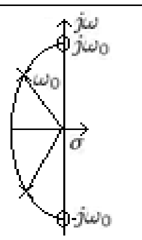
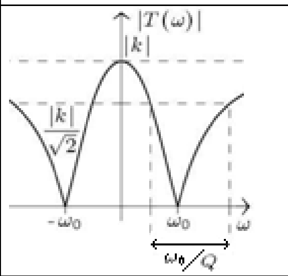
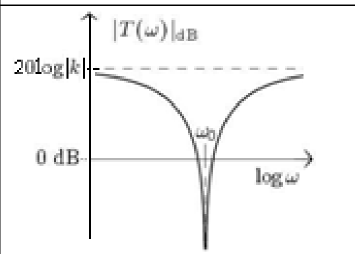
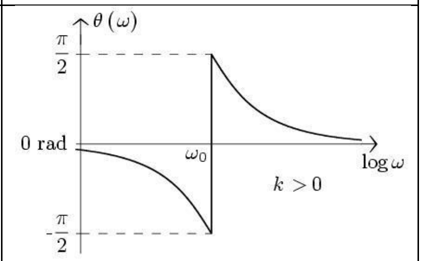
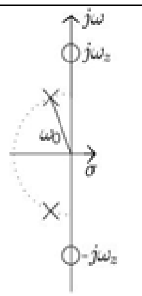
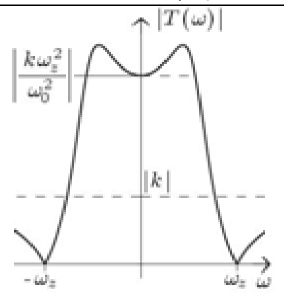
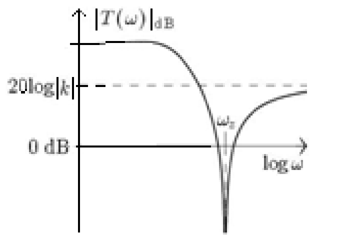
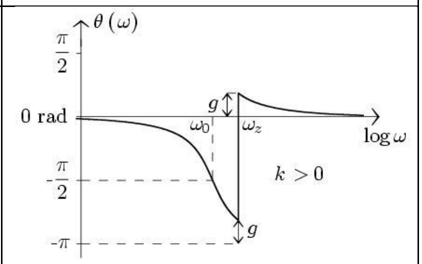






Amplitude
jω
σ
Amplitude
jω
σ

INTEGRADOR $\frac{K}{s}$				
DIFERENCIAD OR Ks				
PASSA-BAIXA 1ª ORDEM $\frac{K\sigma_0}{s+\sigma_0}$				
PASSA-ALTA 1ª ORDEM $\frac{Ks}{s+\sigma_0}$				
ALL-PASS 1ª ORDEM $\frac{K(-s+\sigma_0)}{s+\sigma_0}$				
PASSA-BAIXA 2ª ORDEM $\frac{K\omega_0^2}{s^2+(\omega_0/Q)s+}$				

PASSA-ALTA $2^{\underline{a}}$ ORDEM $$\frac{Ks^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$	 2 zeros no infinito			
ALL-PASS $2^{\underline{a}}$ ORDEM $$\frac{K(s^2-\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$				
PASSA-FAIXA $$\frac{K(\omega_0/Q)s}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$	 1 zero no infinito			
REJEITA-FAIXA $$\frac{K(s^2+\omega_z^2)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$ $\omega_z = \omega_0$				
PASSA-BAIXA NOTCH $$\frac{K(s^2+\omega_z^2)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$ $\omega_z > \omega_0$				
PASSA-ALTA NOTCH $$\frac{K(s^2+\omega_z^2)}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$ $\omega_z < \omega_0$