1- RESPOSTA TEMPORAL EM FUNÇÃO DA POSIÇÃO DOS POLOS

Seja $R(s) = F(s)E(s)$ a resposta de um sistema linear, concentrado e invariante. Se $F(s)$ e $E(s)$ são funções reais racionais, então $R(s)$ é real racional e pode ser expressa como:

$$R(s) = \frac{N'(s)}{D(s)} = \sum_{i=0}^{m} a_i s^i \Big/ \sum_{j=0}^{n} b_j s^j \tag{1}$$

Se $m > n$ então $R(s)$ pode ser escrita como:

$$\frac{N'(s)}{D(s)} = k_{m-n} s^{m-n} + k_{m-(n+1)} s^{m-(n+1)} + \cdots + k_1 s + k_0 + \frac{N(s)}{D(s)} \text{ com } \partial N(s) < \partial D(s) \tag{2}$$

Se $m = n$ $R(s)$ pode ser escrita como:

$$\frac{N'(s)}{D(s)} = k_\infty + \frac{N(s)}{D(s)} \text{ com } \partial N(s) < \partial D(s)\,,\ k_\infty = \lim_{s\to\infty} \frac{N'}{D} = \frac{a_m}{b_n} \text{ e } N(s) = N'(s) - k_\infty D(s)\,. \tag{3}$$

O denominador $D(s)$ com $b_n = 1$ pode ser escrito como $D(s) = \prod_{i=1}^{n} (s - p_i) = \prod_{i=1}^{k} (s - p_i)^{m_i}$, onde p_i é o i-ézimo pólo com multiplicidade m_i, com $\sum_{i=1}^{k} m_i = n = \partial D(s)$. A decomposição de $N(s)/D(s)$ em frações parciais fornece

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{k_{ij}}{(s - p_i)^j} = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{k_{i1}}{(s - p_i)} + \frac{k_{i2}}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{k_i m_i}{(s - p_i)^{m_i}} \right] \tag{4}$$

onde os resíduos k_{ij} são dados por:

$$k_{ij} = \frac{1}{(m_i - j)!} \frac{d^{m_i - j}}{ds^{m_i - j}} \frac{N(s)}{D(s)} (s - p_i)^{m_i} \Bigg|_{s = p_i} \tag{5}$$

Cada polo de multiplicidade m_i será responsável por uma resposta do tipo:

$$r_i(t) = k_{i1} e^{p_i t} + k_{i2} t e^{p_i t} + \cdots + \frac{k_i m_i}{(m_i - 1)!} t^{m_i - 1} e^{p_i t} \tag{6}$$

Se p_ℓ é um polo complexo, p_ℓ^* também o será **(porque?)**. Da mesma forma os resíduos correspondentes também serão complexos conjugados, que é uma condição para que os coeficientes sejam reais. Assim, a resposta associada a p_ℓ é:

$$r_\ell(t) = k_{\ell 1} e^{p_\ell t} + k_{\ell 1}^* e^{p_\ell^* t} + \cdots + \frac{k_\ell m_\ell}{(m_\ell - 1)!} t^{m_\ell - 1} e^{p_\ell t} + \frac{k_\ell^* m_\ell t^{m_\ell - 1}}{(m_\ell - 1)!} e^{p_\ell^* t} \tag{7}$$

ou, ainda

$$r_\ell(t) = \sum_{i=1}^{m_i} 2 \left| k_{\ell i} \right| t^{(i-1)} e^{a_\ell t} \cos(b_\ell t + \theta_i) \text{ onde } p_\ell = a_\ell \pm j b_\ell \text{ e } \theta_i = -\mathrm{tg}^{-1} \left[\frac{\Im\mathrm{m}(k\ell_i)}{\Re\mathrm{e}(k\ell_i)} \right] \tag{8}$$

Consideremos um caso particular onde $p_\ell = -a - bj$ com resíduo $c + dj = k$ e $p_\ell^* = -a + bj$ com resíduo $c - dj = k^*$. Então a resposta $r(t)$ será:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[R(s)\right] = r(t) = 2e^{-at}\left[c\cos bt + (-d\,\mathrm{sen}\,bt)\right] = 2\left|k\right|e^{-at}\left[\cos\left(bt + \mathrm{tg}^{-1}\frac{d}{c}\right)\right] \tag{9}$$

Esta análise mostra que os polos de $R(s)$ determinam a forma de onda da resposta. Os zeros influem na fase e na amplitude dos resíduos k_i determinando, por conseguinte, a amplitude e o ponto inicial dos sinais de resposta da rede.

Para ilustrar o comportamento de uma rede em função da parte real do polo ou de sua multiplicidade tomemos uma função de rede $T(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{R(s)}{E(s)}$. Suponhamos que a excitação seja impulsiva, isto é, $e(t) = \delta(t) \rightarrow E(s) = 1$. Assim $T(s) = R(s)$, e a função de rede é a própria resposta do sistema. Supondo º N(s) < º D(s) (isto é supondo a análise da influência somente dos polos finitos com saída sem característica impulsiva), a função $T(s)$ pode ser decomposta em:

$$T(s) = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n} \tag{10}$$

Sabendo por (5) que $K_1 = T(s)(s + p_1)\big|_{s=-p_1}$ e $K_2 = T(s)(s + p_2)\big|_{s=-p_2}$, calcule $T(s)$ na forma $T(s) = \frac{K_1}{s + p_1} + \frac{K_2}{s + p_2}$ para $T(s) = \frac{6}{(s + p_1)(s + p_2)}$. **Resposta**: $T(s) = \frac{6}{(s + p_1)} + \frac{-6}{(s + p_2)}$

Nas Figuras 1, 2 e 3 estão ilustrados os tipos de resposta em função da localização dos polos.

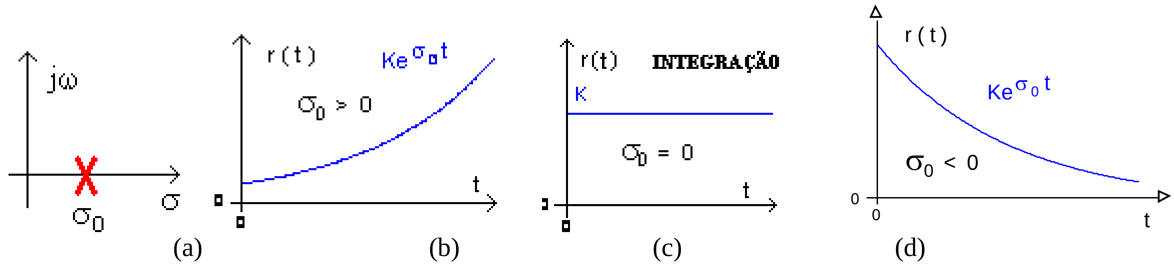

Figura 1 - Respostas Impulsivas em Função da Localização dos Polos em Funções de 1ª Ordem.

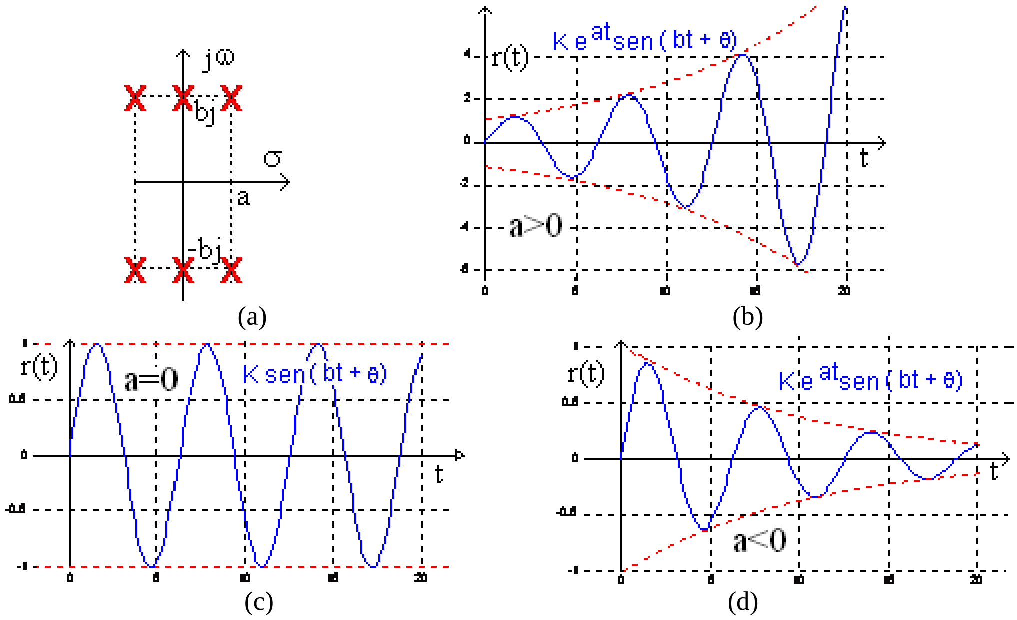

Figura 2 - Respostas impulsivas em função da localização dos polos em funções de 2ª ordem.

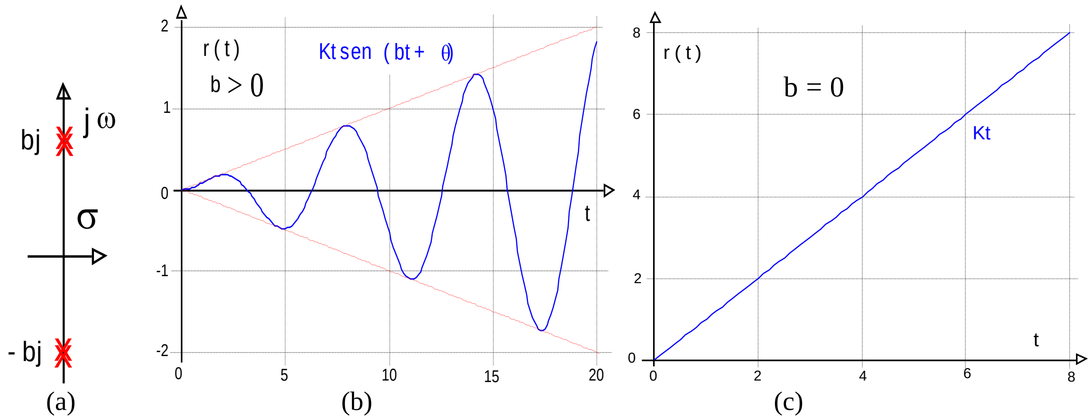

Figura 3 - Respostas Impulsivas em Função da Localização dos Polos em Funções de 2ª Ordem com Polos de Multiplicidade 2

2 - INTERPRETAÇÃO DE POLOS E DE ZEROS NO DOMÍNIO TEMPO.

Seja uma função de rede $T(s) = T_O \prod_{i=1}^{m}(s - z_i) / \prod_{i=1}^{n}(s - p_i)$. Suponhamos que os polos e zeros são simples. Se a excitação tem um pólo simples em $s = z_k$, então a componente forçada da resposta devido à excitação é zero, já que o polo de $E(s)$ é cancelado pelo zero de $T(s)$, isto é, $R(s) = T(s)E(s) = k\dfrac{(s - z_i)\ldots(s - z_k)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)\ldots(s - p_n)} \times \dfrac{1}{(s - z_k)}$ e a resposta $r(t)$ não terá qualquer característica do sinal de excitação $e(t)$, caracterizado por $e^{z_k t}$.

Exemplo 1

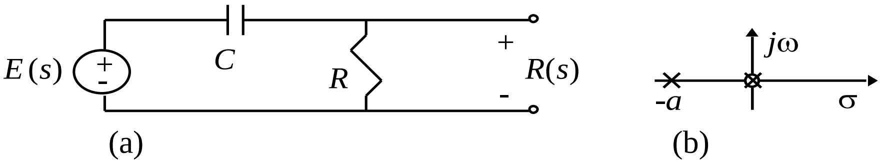

Figura 4- Filtro Passa-alta de ordem 1.

$$T(s) = \frac{R(s)}{E(s)} = \frac{s}{s + a} \qquad e(t) = u(t) \;\therefore\; E(s) = \frac{1}{s} \qquad R(s) = \frac{s}{s + a}\frac{1}{s} = \frac{1}{s + a} \tag{11}$$

$\therefore\; r(t) = e^{-at}u(t) \;\therefore$ A saída não contém traço da entrada porque o polo do sinal na origem foi cancelado pelo zero de $T(s)$ na origem.

Suponhamos agora que a excitação tenha um polo simples em p_ℓ. Neste caso a resposta do sistema é $R(s) = T(s)E(s) = k\dfrac{(s - z_i)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)\ldots(s - p_\ell)\ldots(s - p_n)} \times \dfrac{1}{(s - p_\ell)}$. Então, a resposta $r(t)$ exibirá componentes do tipo $e^{p_\ell t}$ e $te^{p_\ell t}$.

Exemplo 2

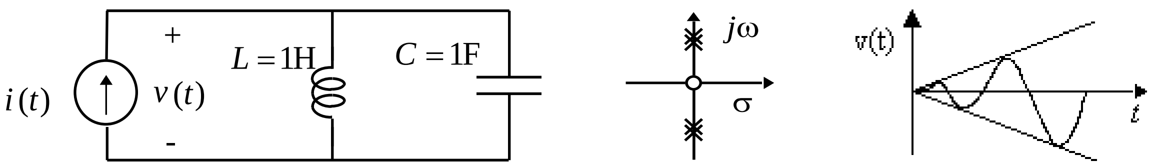

Figura 5 -

$$Z(s) = V(s) / I(s) = s / s^2 + 1 \tag{12}$$

$$\text{Se } i(t) = \operatorname{sen} t\, u(t) \;\therefore\; I(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \;\therefore\; V(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2} \;\therefore\; v(t) = \frac{t}{2}\operatorname{sen} t \times u(t) \tag{13}$$