

FILTROS TRANSICIONAIS OBTIDOS POR INTERPOLAÇÃO DE PÓLOS - ESTUDO COMPARATIVO

Gabriel C. Kulevicz da Silva, Sidnei Noceti Filho

LINSE: Circuitos e Processamento de Sinais

Universidade Federal de Santa Catarina - Florianópolis SC - Brasil

gabriel@linse.ufsc.br, sidnei@linse.ufsc.br

5.4-1) Interpolação exponencial na magnitude e linear no ângulo dos pólos

5.4-2) Interpolação linear na magnitude e linear no ângulo dos pólos

5.4-3) Interpolação linear nas partes real e imaginária dos pólos

5.4-4) Produto do quadrado das Funções Características

5.4-5) Soma do quadrado das Funções Características

5.4-6) Soma do quadrado dos Polinômios do Denominador

5.4-7) Interpolação linear nos coeficientes do denominador na variável "s"

5.4-8) Interpolação linear nos coeficientes do denominador da função magnitude ao quadrado

5.4-9) Complementary Pole–Pair Filters

5.4-10) Gauss to 12 e 6dB (TR CB-GS)

1. INTRODUÇÃO

Um problema de filtragem, que envolve requisitos simultâneos de magnitude e fase, pode não ter solução através do uso de filtros clássicos, tais como Chebyshev (CB), Butterworth, Bessel, Gauss, *Sync-Tuned* (ST), dentre outros. As funções desses filtros são de fase mínima, tendo então a fase e a magnitude relacionadas pela transformada de Hilbert.

No projeto de filtros em que há a necessidade de se considerar características de atenuação (CAA), de fase (CAF) e temporais (CAT) pode-se utilizar três procedimentos:

i) Através de um processo de otimização simultânea das características de magnitude e fase e/ou temporais. Porém, essa solução pode demandar um elevado custo computacional e o sucesso (ou não) de tal estratégia depende fortemente da escolha da estimativa inicial, do tipo de algoritmo e da extensão do espaço de busca considerado.

ii) Através da cascata de um filtro clássico, atendendo as características de magnitude, e usando um filtro passa-tudo que equaliza a fase mantendo as características de atenuação.

Nas duas soluções supramencionadas, tem-se como resultado o aumento da ordem e do tempo de atraso do sistema.

iii) Através do uso de filtros transicionais (TR). Em contrapartida ao projeto dos filtros convencionais, esses filtros podem atender simultaneamente especificações de CAA, CAF e CAT. Os filtros TR mesclam características conflitantes de magnitude e fase e/ou tempo, utilizando a variação de um parâmetro que faz com que o filtro resultante apresente características intermediárias entre aquelas de dois filtros formadores *A* e *B*.

Existem na literatura diversos tipos de filtros transicionais que utilizam:

1) Interpolação exponencial na magnitude e linear no ângulo dos pólos (EXP), Hájek *et al* [2]

2) Interpolação linear na magnitude e linear no ângulo dos pólos (LIN1), Taylor [3]

3) Interpolação linear nas partes real e imaginária dos pólos (LIN2), Farias *et al.* [4], Fernandes *et al.* [5]

4) Produto do quadrado das funções características, Pai *et al.* [6]

5) Soma do quadrado das funções características, Lindquist *et al.* [7]

6) Soma do quadrado dos polinômios do denominador, Thajchayapong *et al.* [8]

7) Interpolação linear nos coeficientes do denominador da transformada de Laplace (variável "s"), Beccari [9]

8) Interpolação linear nos coeficientes do denominador da função magnitude ao quadrado, Beccari [9]

9) *Complementary pole–pair filters*, Pai *et al.* [10]

10) *Gauss to 12 and 6dB*, Zverev [11].

O estudo dos filtros transicionais de 4 a 10 estão fora do escopo deste trabalho, visto que não consideram a interpolação dos pólos de dois filtros formadores.

2. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

2.1 Especificações de Magnitude de um Filtro Passa-Baixas

Na Fig. 1 são mostradas as especificações de magnitude de um filtro passa-baixa com frequências normalizadas Farias *at al.* [12], onde A_{\max} é a máxima atenuação permitida na banda passante, A_{\min} é a mínima atenuação exigida na banda de rejeição, $\bar{\omega}_p = 1 \text{ rad/s}$ é a frequência limite de banda passante normalizada e $\bar{\omega}_s$ é a frequência limite de banda de rejeição.

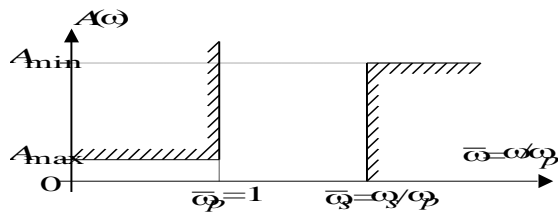


Figura 1. Gabarito de um filtro passa-baixas com frequências normalizadas.

2.2 Fator interpolador

As singularidades de um filtro TR de ordem n (com pólos s'_{kT}) são obtidas a partir das singularidades de dois filtros formadores. Um filtro A (mais seletivo com pólos s'_{kA}) e um filtro B (menos seletivo com pólos s'_{kB}).

Assim, através de um fator interpolador m , ajustam-se as características do filtro TR [4].

Neste trabalho são considerados os três tipos de interpolação dos pólos já comentados anteriormente:

1) Interpolação exponencial na magnitude e linear no ângulo dos pólos [12]:

$$s'_{kT} = (s'_{kA})^m (s'_{kB})^{1-m}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1)$$

2) Interpolação linear na magnitude e no ângulo dos pólos [3]:

$$|s'_{kT}| = (|s'_{kA}|)^m (|s'_{kB}|)^{1-m}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2)$$

$$\angle s'_{kT} = m \angle s'_{kA} + (1-m) \angle s'_{kB}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

$$\angle s'_{kT} = m \angle s'_{kA} + (1-m) \angle s'_{kB}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (4)$$

3) Interpolação linear nas partes real e imaginária dos pólos [4]

$$s'_{kT} = (1-m)s'_{kA} + ms'_{kB}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5)$$

Em (1), (2) e (5), percebe-se que:

- se $m = 0 \rightarrow$ filtro TR \equiv filtro A;
- se $m = 1 \rightarrow$ filtro TR \equiv filtro B;
- se $0 < m < 1 \rightarrow$ o filtro TR possui características intermediárias entre os filtros A e B.

2.3 Ajuste na Banda Passante

Após atribuir um valor inicial para m (p. e. $m = 0,5$), obtém-se os pólos s'_{kT} e a função

$$T(s') = \frac{a_0}{\prod_{k=1}^n (s' - s'_{kT})} = \frac{a_0}{s'^n + a_{n-1}s'^{n-1} + \dots + a_0}.$$

Porém agora nada garante que se tenha A_{\max} em $\omega_p = 1 \text{ rad/s}$. O próximo passo é encontrar numericamente a frequência ω_N na qual se tem a atenuação A_{\max} , através da função $|T(\omega')|_{\text{dB}} = 20 \log |T(s')|_{s'=j\omega'}$. Após, faz-se uma mudança de variável, substituindo-se s' por $s' = \omega_N \bar{s}$ na função $T(s')$. Assim, no limite da banda passante normalizada $\bar{\omega}_p = 1$, será obtida a desejada atenuação A_{\max} [1]. Esta transformação também pode ser aplicada as singularidades. Assim as novas singularidades são $\bar{s}_{kT} = (1/\omega_N) \times s'_{kT}$. Portanto,

$$T(\bar{s}) = \frac{b_0}{\prod_{k=1}^n (\bar{s} - \bar{s}_{kT})} = \frac{b_0}{\bar{s}^n + \dots + b_0} \quad (6)$$

2.4 Ajuste na Banda de Rejeição

Após a obtenção de (6) tem-se ajustada a função no limite da banda passante. Porém, como o atual m foi arbitrariamente escolhido, para que o filtro TR tenha as melhores CAF e CAT possíveis, torna-se necessário um ajuste da magnitude na banda de rejeição. Isto, com o intuito de torná-lo o menos seletivo possível e ainda atender as CAA desejadas. Deve-se então tentar obter:

$$|\mathcal{T}(s)|_{CB} = A_{\min} \quad (7)$$

No entanto, para um dado n , uma dada atenuação A_{\max} e um dado par de filtros formadores A e B , existirá um e somente um valor de m que satisfaz (7). Então um novo valor de m deve ser atribuído e todo o processo de ajuste deve ser repetido. Isto pode ser feito através de um processo iterativo até que (7) seja satisfeita [1].

3. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Como exemplo de aplicação considere o projeto de três filtros TR CB-ST normalizados com ordem $n=5$, que devem atender as seguintes especificações:

CAA: $A_{\max}=3,01\text{dB}$ e $A_{\min}=60\text{dB}$ em $\bar{\omega}_s=5$

CAF: $\Delta\tau_g \leq 0,3s$ e $\Delta\tau_p \leq 0,1s$

CAT: $T_{AC} \leq 6,5s$ e $T_{AT} \leq 3s$,

onde $\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min}$ é a máxima variação do atraso de grupo ($\Delta\tau_g$) ou de fase ($\Delta\tau_p$) para $0 \leq \bar{\omega} \leq 1\text{rad/s}$, T_{AC} é o tempo de acomodação (1%) da resposta ao degrau e T_{AT} é o tempo de atraso do filtro, considerado o tempo em que ocorre o pico da resposta ao impulso.

Na Tabela 1 pode ser visto que o filtro CB atende as CAA, mas não atende as CAF e CAT e que o inverso ocorre com o filtro ST.

A Fig. 2 mostra o *root-locus* para os filtros TR: EXP, LIN1 e LIN2, com $0 \geq m \leq 1$.

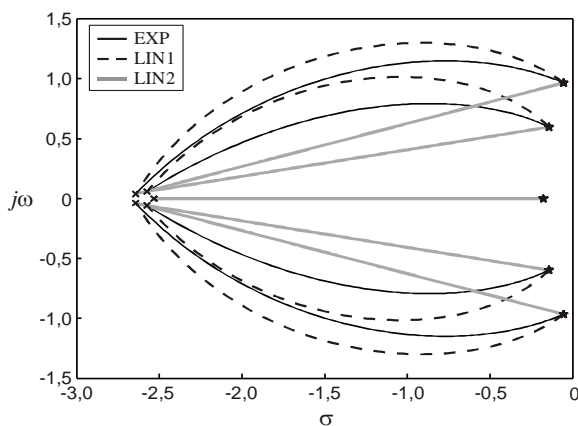


Figura 2. *Root-locus* para os filtros TR com $0 \geq m \leq 1$.

Seguindo os passos de projeto descritos anteriormente, os melhores valores de m encontrados foram: Filtro EXP: $m=0,1296$, Filtro LIN1: $m=0,334$ e Filtro LIN2: $m=0,1249$.

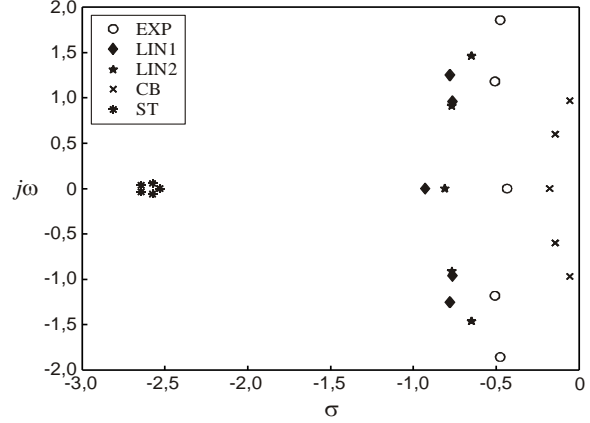


Figura 3. Pólos dos filtros TR, CB e ST.

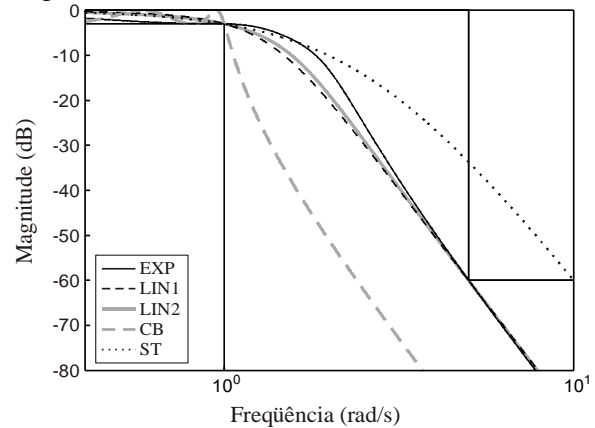


Figura 4. Magnitude de todos os filtros.

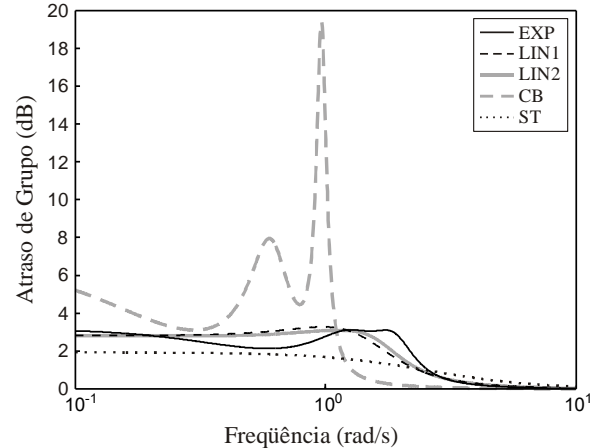


Figura 5. Atrasos de todos os filtros.

As Fig. 3, 4, e 5, mostram, respectivamente, os pólos, a magnitude e o atraso de grupo, dos filtros TR e dos filtros formadores CB e ST.

A Tabela 1 mostra os resultados obtidos para os três filtros TR junto com características dos filtros formadores CB e ST. Pode ser observado que para este particular conjunto de requisitos e conjunto de filtros formadores, somente com o filtro TR LIN1 atende ao requisitos de magnitude e fase e tempo.

Tabela 1 – Resultados

FILTRO	CAA	CAF		CAT	
	A_{\min}	$\Delta\tau_g$ (s)	$\Delta\tau_p$ (s)	T_{AC} (s)	T_{AT} (s)
CB	93,6	12,93	2,3	44,11	5,28
ST	33,7	0,25	0,088	4,55	1,543
EXP	60	1,04	0,67	10,9	2,63
LIN1	60	0,272	0,066	6,08	2,83
LIN2	60	0,464	0,19	6,872	2,89

Nota: Em negrito: Não atende a especificação

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram comparados três tipos de filtros transicionais baseados na interpolação dos pólos de dois filtros formadores. Foi mostrado um exemplo no qual somente um dos três filtros satisfaz todos os requisitos de projeto. É importante mencionar que dependendo dos requisitos e dos filtros formadores, quaisquer dos três tipos estudados podem apresentar o melhor desempenho sob o ponto de vista de características de atenuação, fase e tempo.

REFERÊNCIAS

- [1] S. Noceti Filho, Filtros Seletores de Sinais, Florianópolis, SC: 2010, 3ª edição.
- [2] K. Hájek and J. Sedláček, “A New TICFU transitional approximation”, ECCTD 95 European Theory and Design, 1995, pp. 913-916.
- [3] A. D. Taylor, “A study of transitional filters,” M.S.E.E. Directed Research, California State Univ., Long Beach, 1975.
- [4] A. S. Farias, S. Noceti Filho e R. Seara, “Transitional filters using linear interpolation with the filter selection based on the total mean weighting performance”, ICECS/2002, Sep. 2002, Dubrovnik, Croatia, pp. 201-204.
- [5] R. S. M. Fernandes, S. Noceti Filho, R. Seara e A. S. Farias, “Otimização de características de fase via filtros transicionais Caueer-Chebyshev inverso”, XV CBA, Set. 2004, Gramado – RS, pp. 01-06.
- [6] K. R. Pai, K. V. V., Murthy, V. Ramachandran, “Chebyshev family of transitional filters”, JCSC, Vol. 8, nº 2, 1998, pp. 283-299.
- [7] C. S. Lindquist and C. A. Corral, “A New Type of transitional filter based on summation of polynomials”, Journal of the Franklin Institute 342, 2005, pp. 447-472.
- [8] P. Thajchayapong, S. Bunjongjit and M. Puangpool, “A Design for the Additional Members of the Mucromaf-Mucroer Filters”, IEEE, vol. 70, nº 3, March, 1982, pp. 304-306.
- [9] C. Beccari, “Comparison between different transitional Filters”, Alta Frequenza, vol. 48, Nov. 1979, pp. 473-476.
- [10] K. R. Pai, K. V. V. Murthy, V. Ramachandran, “Complementary pole–pair filters and pole–parameter transformations”, Journal of Circuits, Systems, and Computers, vol. 6, nº 4, 1996, pp. 319-350.
- [11] A. I. Zverev, Handbook of filter Synthesis, New York, 1967, p. 74.
- [12] A. S. Farias, S. Noceti Filho e R. Seara, “Projeto de Filtros Transicionais Chebyshev – Legendre – Butterworth – Bessel – Gauss – Multiplicidade N”, XIV CBA, Natal, RN, pp. 3095-3096.